

1

17.02.2000 תש"ס ומתמטיקה. תש"ס.  
מבגים אלגבריים. חמסטר א', מועד ב'.  
שם המרצה: ז'ורג' מונז'וק.  
משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק במחשיבו ובדפי עזר המצורפים לטופס הבחינה.  
חלק א': בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.

**1. 15 נקודות**

יהי  $F$  שדה כלשהו. נגדיר קבוצה  $G = \{(a, b) \in F \times F \mid a \neq 0\}$  ופעולה בינארית.  
 $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ . הוכח או הפרך  
א. קיים איבר-היחידה ביחס ל- $*$ .  
ב. כל  $g \in G$  הפיך ביחס לפעולה  $*$ .  
ג. חבורה ביחס ל- $*$ .

**2. 15 נקודות**

יהי  $f: H \rightarrow G$  הומומורפיזם כלשהו בין חבורות  $G$  ו- $H$ . הוכח ש:  
א.  $f(e_H) = e_G$ ;  
ב. לכל  $h \in H$  מתקיים  $f(h^{-1}) = f(h)^{-1}$ .  
ג.  $K \leq H \Rightarrow f(K) \leq G$ .

**3. 15 נקודות**

תהי  $G$  חבורה כלשהי ו  $g \in G$  איבר כלשהו בעל סדר סופי.  
א. הוכח ש-  $g^n = e \Leftrightarrow o(g) \mid n$ .  
ב. הוכח ש-  $o(g^m) = \frac{lcm(m, o(g))}{m}$ .

**4. 15 נקודות**

יהי  $F$  שדה כלשהו ו  $a \in F$  איבר כלשהו. הוכח שפולינום  $p(x) \in F[x]$  מתחלק ב- $x-a$  אם ורק אם  $a$  שורש של  $p(x)$ .

(2)

חלק ב': יש לענות על 5 שאלות. תשובות לחלק זה ייבדקו רק בטופס הבחינה.  
בשאלות 5 ו 6 יש לכתוב תשובה נכונה בתשובה המתאימה.  
בשאלות אנו ייקראו (שאלות 7-9) יש לעל את התשובה הנכונה.

10.5 נקודות.

שתי תמורות של הקבוצה  $Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$  מוגדרות ע"י הנוסחאות  
הבאות:  $f = (1,2,4)(5,6)$ ,  $g(x) = -x + 3, x \in Z_8$ .  
( $Z_8$  הפעולות מתבצעות ב- $Z_8$ ).

$(174)(03)(r6)$	א. חשב את $f^2g^{-1}$ :
$(174)(03)(r6)$	ב. פרק את $f^2g^{-1}$ למכפלה של מחזורים זרים:
$\circ (f^2g^{-1}) = \text{LCM}(2, 4, 2) = 6$	ב. מצא סדר של $f^2g^{-1}$ :
$(17)(14)(03)(r6)$	ג. פרק את $f^2g^{-1}$ למכפלה של חילופים:

10.6 נקודות.

חשב את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:  
 $a(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 \in Z_3[x]$ ,  $b(x) = x^3 + 2 \in Z_3[x]$

$\text{gcd}(a(x), b(x)) =$

10.7 נקודות.

רשום את כל המחלקות ~~המחלקות~~ של חבורה  $A_4$  לפי תת-חבורה  $S_4$ .  
 $K_4 = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$

$[A_4 : K_4] = \frac{24}{4} = 6$  יש 3 מחלקות

$K_4$	I
$(123)K_4$	II
$(132)K_4$	III

פרק גניסן

$S_4 \rightarrow \frac{24}{4} = 6$   
 $K_4 \rightarrow \frac{4}{4} = 1$

3

10.8 נקודות.

מספר תת-חבורות  $H$  של  $Z_{12}$  שמקיימות  $1 < |H| < 12$  שווה ל

- 1. 1
- 2. 2
- 3. 3
- 4. 4

ה. אף אחת מהתשובות האחרות לא נכונה.

10.9 נקודות.

נתונה מערכת משוואות לינאריות שהמקדמים שלה שייכים לשדה  $Z_3$ :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ -2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

אזי

- א. לממ"ל יש פתרון יחיד.
- ב. לממ"ל אין פתרונות.
- ג. לממ"ל יש 3 פתרונות.
- ד. לממ"ל יש 9 פתרונות.
- ה. אף אחת מהתשובות האחרות לא נכונה.

בהצלחה!